Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Kandidaatintutkielma

Propositiologiikan keskeiset päätelmät

Joel Yliluoma

Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelma
Ohjaaja: Yliopistonlehtori Petteri Harjulehto 23. huhtikuuta 2023

Tiivistelmä

Tiedekunta: Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Koulutusohjelma: Matematiikan, fysiikan ja kemian aineenopettajan kandi- ja maisteriohjelma
Opintosuunta: Matematiikka ja tietojenkäsittelytiede
Tekijä: Joel Yliluoma
Työn nimi: Propositiologiikan keskeiset päätelmät
Työn laji: Kandidaatin tutkielma
Kuukausi ja vuosi: Maaliskuu 2023
Sivumäärä: 39
Avainsanat: propositiologiikka, logiikka, klassinen logiikka, luonnollinen päättely, looginen päättely, päättely, päättelypuu, päättelysäännöt, sääntökokoelma, lainalaisuudet
Ohjaaja tai ohjaajat: Petteri Harjulehto
Tiivistelmä: Tässä työssä esitellään luonnollisen päättelyn todistukset laajaan kokoelmaan tunnetuista propositiologiikan päättelysäännöistä, kuten de Morganin lait, sekä algebrallisista lainalaisuuksista, kuten vaihdannaisuudet ja liitännäisyydet.

Työ alkaa johdannolla, jossa määritellään todistusten ymmärtämiseen tarvittavat propositiologiikan konnektiivit eli operaattorit, joiden avulla muodostetaan lauseita yhdessä muuttujien kanssa. Määrittelystä edetään luonnollisen logiikan päättelysääntöihin, joihin varsinainen työ perustuu. Kullekin konnektiiville listataan ja selitetään tuonti- ja eliminointisäännöt, jotka johdannon lopussa kootaan yhteen.

Johdannon jälkeen varsinainen työ koostuu kappaleista, joihin on koottu sellaisia logiikan päättelysääntöjä ja niiden todistuksia, jotka eivät ole itsessään osa luonnollista päättelyä. Esimerkiksi *modus ponens* on osa luonnollista päättelyä (implikaation eliminointisääntö), mutta *modus tollens* ei ole. Päättelysäännöt ovat kirjallisuudesta koottuja tunnettuja logiikan lainalaisuuksia. Ensimmäiset päättelysäännöt pääasiassa vain selventävät varsinaisia päättelysääntöjä. Tämän jälkeen edetään implikaatiosäännöiksi kutsuttuun ryhmään, joka sisältää n.s. *modus*-säännöt. Kukin sääntö todistetaan erikseen luonnollisen päättelyn päättelypuulla. Seuraavaksi käydään n.s. dilemma-säännöt sekä resoluutio.

Monimutkaisimmat todistukset löytyvät kappaleesta, joka käsittelee yksinomaan de Morganin sääntöjä. Säännöt todistetaan kaksisuuntaisesti sekä lisäksi muunnetussa muodossa, jossa yksi negaatioista on siirretty päättelyn toiselle puolelle, jolloin päättelyn toinen päätepiste on paljas konjunktio tai disjunktio.

Työn seuraavat kappaleet käsittelevät loogisten konnektiivien algebrallisia lainalaisuuksia kuten vaihdannaisuutta ja liitännäisyyttä. Osa näistä lainalaisuuksista johtaisi lukukelvottoman pitkiin luonnollisen päättelyn päättelypuutodistuksiin, joten näissä tapauksissa todistamiseen on käytetty totuustaulua luonnollisen päättelyn sijasta. Lopuksi työ käy läpi muutaman tunnetun tautologiasäännön, kuten kielletyn kolmannen lain sekä kielletyn ristiriidan lain.

Työn liitteissä kootaan algebralliset lainalaisuudet yhteen tiiviiksi taulukoksi mahdollista viitekäyttöä varten. Lisäksi kootaan taulukoksi useita kirjallisuudessa esiintyviä vaihtoehtoisia merkintätapoja loogisille konnektiiveille.

Sisällys

1. Johdanto

1.1. Propositiologiikka

Muuttujat ja konnektiivit

Propositiologiikka on matematiikan osahaara, joka käsittelee totuusarvoja.[1] Propositio, väittämä, on matemaattinen lauseke, joka koostuu muuttujista sekä konnektiiveista. Muuttujia voidaan merkitä kirjainsymboleilla, esim. p tai A tai x_0. Ne edustavat jotakin tietoa, joka voi olla tosi tai epätosi.[RK13, s.2] Konnektiivit vastaavat matemaattisia operaatioita, mutta lukuarvojen sijaan ne toimivat näillä totuusarvoilla. Tärkeimpiä konnektiiveja ovat implikaatio, konjunktio, disjunktio, negaatio ja ekvivalenssi.[2] Pääkonnektiivi tarkoittaa lausekkeen ulointa konnektiivia, sitä, joka matemaattisessa laskutoimituksessa suoritettaisiin viimeisenä. Esimerkiksi lausekkeessa $A \wedge B$ pääkonnektiivi on $\wedge$, sillä se on ainoa konnektiivi lausekkeessa. Lauseessa $C \vee (A \wedge B)$ pääkonnektiivi sen sijaan on $\vee$, sillä $\wedge$ on sulkujen takia laskujärjestyksessä konnektiivia $\vee$ edellä.

Implikaatio

Loogisen päättelyn ehkä tärkein työkalu on implikaatio. Implikaatio on väittämä, jonka mukaan vasemmanpuoleisesta väittämästä seuraa oikeanpuoleinen.

Implikaatiota merkitään $p \to q$, ja se voidaan lukea näin: ”jos p [on tosi], niin q [on tosi]”. Tämä ei tarkoita, että p ja q olisivat yhdenpitävät. Mikäli $p \to q$, niin aina silloin kun p on tosi, q on varmasti myös tosi, mutta käänteinen ei välttämättä pidä paikkaansa.

Muista konnektiiveista poiketen vain vasenta väittämää kutsutaan premissiksi. Oikeanpuoleista väittämää kutsutaan johtopäätökseksi tai seuraukseksi.

Implikaation toimintaa voidaan havainnollistaa esimerkillä: ”jos pihalla on murtovaras, koira haukkuu”. On mahdotonta, ettei koira haukkuisi, jos pihalla on murtovaras. Mutta jos pihalla ei ole murtovarasta, haukkuuko koira? Koira saattaa silloinkin haukkua. Koirat ovat omapäisiä. Koiran haukkumisesta ei voi päätellä, että pihalla olisi murtovaras. Tiedetään vain, että jos pihalla on murtovaras, koira varmasti haukkuu. Jos koira on hiljaa, pihalla ei ole murtovarasta.

Konjunktio

Konjunktio on väittämä, jonka mukaan kaksi premissiä ovat samanaikaisesti tosia. Konjunktiota merkitään $p \wedge q$, ja se voidaan lukea näin: ”p ja q [ovat samanaikaisesti tosia]”. Väite on tosi ainoastaan, mikäli sekä p ja q ovat tosia. Väite on epätosi, mikäli kumpi tahansa premisseistä on epätosia.

[1] Propositiologiikka ja Boolen algebra ovat kaksi eri näkökulmaa lähes samaan asiaan. Siinä missä Boolen algebra keskittyy lähinnä algebralliseen totuuslauseiden käsittelyyn, propositiologiikka keskittyy siihen, mitä johtopäätöksiä totuuslauseista voidaan tehdä.

[2] Muita eri yhteyksissä tunnettuja konnektiiveja[SV92, s.34] ovat Shefferin viiva, Peircen nuoli ja eksklusiivinen disjunktio. Koska logiikka kattaa monta eri tieteenalaa tietojenkäsittelytieteestä filosofiaan, rinnakkaisia merkintätapojakin on monia.[SV92, s.155] Niitä on taulukoitu tutkielman liitteessä.

Disjunktio

Disjunktio on väittämä, jonka mukaan ainakin yksi premisseistä on tosi. Disjunktiota merkitään $p \lor q$, ja se voidaan lukea näin: ”p tai q [on tosi]”. Väite on tosi, jos yksikin premisseistä p ja q on tosi. Väite on epätosi ainoastaan, mikäli kumpikin premisseistä on epätosi.

Negaatio

Negaatio on väittämä, jonka mukaan premissi on epätosi. Negaatiota merkitään $\neg p$, ja se voidaan lukea näin: ”ei p”, tai ”p on epätosi”. Väite on tosi, mikäli p on epätosi, ja epätosi mikäli p on tosi.

Ekvivalenssi

Ekvivalenssi on väittämä, jonka mukaan kaksi premissiä ovat yhdenpitäviä. Ekvivalenssia merkitään $p \leftrightarrow q$, ja se voidaan lukea näin: ”jos ja *vain* jos p [on tosi], niin q [on tosi]”. Tällä on se erotus implikaatioon, että mikäli kumpi tahansa muuttuja tiedetään todeksi, tiedetään että toinenkin on totta, riippumatta siitä kumpi muuttuja oli ensimmäiseksi päätelty. Vastaavasti mikäli yksi muuttuja tiedetään epätodeksi, toisenkin on oltava epätosi. Ekvivalenssin toinen nimitys kaksoiskonditionaali tai bikonditionaali viittaakin ekvivalenssin suhteeseen implikaatioon: väite $p \leftrightarrow q$ on yhdenpitävä väitteen $(p \to q) \land (q \to p)$ kanssa. Tämä tarkoittaa, että ekvivalenssi voidaan myös lukea kahtena implikaationa: ”Jos p, niin q, ja jos q, niin p.”[RK13, s.26]

Metakonnektiivit

Tässä tutkielmassa käytetään myös symbolia $\Leftrightarrow$, joka muistuttaa ekvivalenssin symbolia, mutta ei ole propositiosymboli. Merkintä $A \Leftrightarrow B$ tarkoittaa, että propositiot A ja B ovat keskenään identtisiä. Se siis tarkoittaa, että kummasta tahansa lausekkeesta voidaan johtaa toinen.

Merkintä $A \vdash B$ tarkoittaa, että premissistä tai premissijoukosta A voidaan johtaa B. Premissijoukko voi olla myös tyhjä: Merkintä $\vdash C$ tarkoittaa, että on mahdollista päätellä lausekkeen C olevan ehdottomasti totta ilman mitään lähtötietoja.

Merkintä $p \equiv q$ ilmaisee tilannetta, jossa näiden kahden muuttujan arvot ovat samat (eli $p \leftrightarrow q$ on tosi). Se ei tarkoita, että $p \Leftrightarrow q$, sillä väitteet p ja q eivät ole keskenään identtisiä.

1.2. Luonnollinen päättely

Luonnollinen päättely perustuu muutamaan yksinkertaiseen sääntöön, jotka jakautuvat kahteen kategoriaan: *tuonnit* ja *eliminaatiot*. Kullekin konnektiiville on olemassa yksi tai useampi tuontisääntö sekä yksi tai useampi eliminaatiosääntö.

- Konnektiivin $\circledast$ tuonti tarkoittaa, että päättelyistä seuraa tuloksena lauseke, jonka pääkonnektiivina on $\circledast$.

- Konnektiivin $\circledast$ eliminointi tarkoittaa, että jonkin päättelyketjun kautta voidaan luopua lausekkeesta, jonka pääkonnektiivi on $\circledast$, ja saada tilalle jotain muuta.

Päättelyitä kuvataan seuraavan kaavan mukaisilla kaavioilla:

$$\frac{\text{operaatioon johtaneet tiedot}}{\text{johtopäätökset}}\,\text{tehty operaatio}\ .$$

Tehtyjä operaatioita merkitään kirjainsymbolilla E, jos kyseessä on eliminaatio, ja kirjainsymbolilla I, jos kyseessä on tuonti (introduction). Tuonnissa viivan alla on lauseke, jonka pääkonnektiivi on tuotu konnektiivi, ja eliminoinnissa tällainen lauseke on viivan yläpuolella ensimmäisenä. Operaatioon johtaneet tiedot voivat olla myös vastaavia kaavioita, joten kaavioista muodostuukin yleensä eräänlainen rekursiivinen puurakenne, joka kuvaa päättelyketjua kaikkine haaroineen.

Implikaation säännöt

Implikaation tuontisääntö on verrattain yksinkertainen. Mikäli tilapäisesti olettamalla jokin väittämä A todeksi voidaan päätellä, että tällöin väittämän B on oltava tosi, tällöin todistetusti $A \to B$. Luonnollisessa päättelyssä tällaista tilapäistä oletusta merkitään hakasuluilla. Se esitetään alla kuvatun kaavion mukaisesti. Katkopistejana tarkoittaa, että tiedosta A on onnistuttu päättelemään tieto B jollakin päättelyketjulla. Se kuvastaa siis jotain sellaista puurakenteena esitettyä päättelyketjua, jossa esiintyy A ja joka päättyy johtopäätökseen B. [SV92, s.49]

$$\begin{array}{c} [A]_1 \\ \vdots \\ \dfrac{B}{A \to B}\,{\to}\,\mathrm{I}, 1 \end{array}$$

Tilapäinen oletus tarkoittaa, että kyseinen oletus on tehty vain tätä nimenomaista päättelyä varten. Päättelyn aikana toimitaan, kuin A tiedettäisiin todeksi. Kun päättely on suoritettu, sen jälkeen oletukseen ei enää voi viitata, vaan se hylätään.[3] Kirjan pitämiseksi siitä, mitä tarkoitusperää varten tilapäinen oletus on tehty ja mistä alaspäin se ei enää ole voimassa, merkitään tuontisäännön perään oletuksen järjestysnumero pilkulla erotettuna.

Implikaation eliminaatio perustuu tunnettuun loogiseen periaatteeseen nimeltä *modus ponens*, joskus *modus ponendo ponens*[Lem92, s.61], joka voidaan ilmaista muodossa $\{A \to B, A\} \vdash B$. Se tarkoittaa, että mikäli lähtötietoina on, että $A \to B$ ja A on tosi, tällöin voidaan päätellä, että B on tosi. Implikaatio voidaan siis korvata lausekkeella B, ja se kuvataan luonnollisessa päättelyssä seuraavasti:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\,{\to}\,\mathrm{E}\ .$$

[3] Joskus oletus saattaa myös tulla todistetuksi toteen, jolloin oletettua lauseketta voi käyttää säännöstä alaspäin varsinaisena lausekkeena oletuksen sijaan. Näin käy toisinaan mm. disjunktion eliminoinnissa, kts. esim. disjunktion idempotenssi (s. 19) ja disjunktion eliminoinnin korollaari (s. 8).

Konjunktion säännöt

Konjunktion tuonti perustuu päättelyyn $\{A, B\} \vdash A \wedge B$, joka voidaan lukea, että mikäli väittämät A ja B on voitu molemmat osoittaa tosiksi (tai ne tilapäisesti oletetaan tosiksi jonkin päättelyketjussa alapuolella olevan säännön toimesta), tällöin voidaan muodostaa propositio $A \wedge B$. Se ilmaistaan luonnollisessa päättelyssä seuraavasti:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I}\ .$$

Konjunktion eliminaatio, $A \wedge B \vdash \{A, B\}$, taas perustuu siihen, että mikäli tiedetään todeksi väittämä $A \wedge B$, tällöin tiedetään, että sekä A että B ovat tosia. Konjunktio voidaan siis korvata kummalla tahansa noista. Eliminointisääntöjä on siis kaksi.[SV92, s.49] Joissakin materiaaleissa säännöt eritellään numeroilla ($\wedge\mathrm{E}_1$, $\wedge\mathrm{E}_2$). Tässä tutkielmassa tätä erittelyä ei tehdä, vaan merkintää $\wedge\mathrm{E}$ käytetään riippumatta siitä, kumpi haara on poimittu. Nämä kaksi päättelyä on esitetty alla.

$$\frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}$$

Disjunktion säännöt

Disjunktion tuonti, $A \vdash \{A \vee B, B \vee A\}$, perustuu siihen, että mikäli tiedetään, että väittämä A on tosi, silloin pätee minkä tahansa mielivaltaisen väittämän B suhteen, että $A \vee B$ on tosi. Tuontisääntöjä on kaksi: kumman tahansa haaran voi tuoda uutena.[SV92, s.49] Ne esitetään seuraavasti:

$$\frac{A}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}\ .$$

Disjunktion eliminaatio on vaikeampi. Väittämästä $A \vee B$ ei voida suoraan päätellä, että sen enempää A kuin B olisi totta. Mutta mikäli väliaikaisesti *oletetaan*, että A on totta, ja tästä onnistutaan päättelemään *jotain*, ja sama johtopäätös voidaan riippumattomasti johtaa olettamalla, että B olisi totta, silloin disjunktio voidaan korvata tällä johtopäätöksellä. Toisinsanoen:

$$\{A \vee B, A \to C, B \to C\} \vdash C.$$

Kuvitteellinen esimerkki: Tiedetään, että Matti tai Minna on leiponut, mutta ei tiedetä kumpi vai ovatko molemmat. Mikäli kuitenkin tiedetään, että jos Matti olisi leiponut, keittiö kaipaa siivoamista, ja toisaalta mikäli Minna on leiponut, keittiö silloinkin kaipaa siivoamista, silloin tiedetään, että keittiö varmasti kaipaa siivoamista. Emme edelleenkään tiedä, kuka leipoi, mutta olemme saaneet muodostettua uutta tietoa: Keittiö kaipaa siivoamista. Kumpaakaan oletuksista ei saa käyttää enää johtopäätöksen jälkeen: tätä päättelyä varten tehdyt tilapäiset oletukset hylätään. [SV92, s.51] Luonnollinen päättely on siis seuraavanlainen:

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]_1\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]_2\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,\vee\mathrm{E}, 1, 2\ .$$

Negaation säännöt

Negaatiolla on yksi tuontisääntö, jota kutsutaan kahdella eri nimellä riippuen tilanteesta. Ensimmäinen niistä on ehkä helpompi ymmärtää. Se perustuu siihen, että mikäli jostakin oletuksesta voidaan johtaa ristiriita, tällöin oletuksen on oltava virheellinen. Tiiviimmin ilmaistuna: $A \to (B \wedge \neg B) \vdash \neg A$. Sääntöä kutsutaan nimellä *reductio ad absurdum.*

Ristiriita tunnistetaan siitä, että jokin asia on samanaikaisesti tosi ja epätosi. Konstruktiviisessa logiikassa[SV92, s.146] ristiriidan voi merkitä lyhyemmin esim. **F** tai $\perp$, mutta tässä tutkielmassa käytetään Helsingin yliopiston kurssien mukaista klassisen logiikan päättelyä, jossa ristiriita pitää aina merkitä eksplisiittisesti konjunktiolla[4], esim. $p \wedge \neg p$. Päättely näyttää siis tältä:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]_1 \\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\ \neg\mathrm{I}, 1 \quad .$$

Toinen versio negaation tuontisäännöstä on nimeltään *ex falso quodlibet* tai *ex contradictione sequitur quodlibet*, mutta sitä kutsutaan yleisemmin räjähdyksen periaatteeksi: Ristiriitaisesta tilanteesta voi johtaa minkä tahansa päätelmän. Luonnollisen päättelyn tiukat säännöt klassisessa logiikassa edellyttävät kuitenkin, että negaation tuonti voi ainoastaan tuoda negaation. Se tarkoittaa, että mahdottomassa tilanteessa *jonkin* on pakko olla valhetta, eli $A \wedge \neg A \vdash \neg B$. Johtopäätöksen pääkonnektiivin pitää siis olla negaatio. Päättely näyttää siis tältä:

$$\dfrac{A \wedge \neg A}{\neg B}\ \neg\mathrm{I} \quad .$$

Myös kaksoisnegaatio kelpaa päätelmäksi; usein todistuksessa näkeekin peräkkäisiä $\neg$I... $\neg$E -yhdistelmiä, joilla vain kierretään tätä klassisen logiikan rajoitusta[5].

Negaatiolla on vain yksi eliminaatiosääntö: $\neg\neg P \vdash P$, eli mikäli tiedetään, että on epätosi, että p olisi epätosi, tällöin p on tosi. Tätä kutsutaan kaksoisnegaation eliminoinniksi, ja se on esitetty alla.

$$\dfrac{\neg\neg P}{P}\ \neg\mathrm{E}$$

Ekvivalenssin säännöt

Ekvivalenssilla on yksi tuontisääntö, joka muistuttaa konnektiivin toisesta nimestä kaksoiskonditionaali: $\{A \to B, B \to A\} \vdash A \leftrightarrow B$, eli mikäli oletuksesta A voidaan johtaa B, ja oletuksesta B voidaan johtaa A, tällöin propositiot A ja B ovat ekvivalentit. Kyseessä on siis kaksi implikaatiota yhdessä paketissa. Se esitetään siis luonnollisessa päättelyssä seuraavasti:

[4] Tämä käytäntö tekee joskus todistuksesta vaikeaselkoisempia. Vertaileva esimerkki näistä kahdesta käytännöstä löytyy sivulta 15 De Morganin lakien käsittelyn yhteydestä.

[5] Tästä löytyy esimerkki mm. *modus tollendo ponens*in todistuksesta (s. 10).

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]_1 & & [B]_2 \\ \vdots & & \vdots \\ B & & A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B}\leftrightarrow \mathrm{I}, 1, 2 \quad .$$

Ekvivalenssin eliminointisäännöstö on yksinkertaisempi. Sääntöjä on kaksi: $\{A \leftrightarrow B, A\} \vdash B$ ja $\{A \leftrightarrow B, B\} \vdash A$. Mikäli tiedetään $A \leftrightarrow B$ sekä lisäksi, että A on tosi, tällöin B on myös tosi. Lauseke on tietenkin symmetrinen, joten tästäkin on kaksi versiota, jotka on esitetty alla.

$$\dfrac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A}\leftrightarrow \mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B}\leftrightarrow \mathrm{E}$$

Yhteenveto

Implikaatio:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]_1\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,\to\mathrm{I},1 \qquad \dfrac{A \to B \qquad A}{B}\,\to\mathrm{E}$$

Konjunktio:

$$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}$$

Disjunktio:

$$\dfrac{A}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]_1\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]_2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee\mathrm{E},1,2$$

Negaatio:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]_1\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I},1 \qquad \dfrac{A \wedge \neg A}{\neg B}\,\neg\mathrm{I} \qquad \dfrac{\neg\neg P}{P}\,\neg\mathrm{E}$$

Ekvivalenssi:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]_1\\ \vdots\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]_2\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B}\,\leftrightarrow\mathrm{I},1,2 \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A}\,\leftrightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B}\,\leftrightarrow\mathrm{E}$$

Näihin todistusrakenteisiin perustuvat kaikki tämän tutkielman todistukset.

Mihin luonnollista päättelyä voi käyttää?

Luonnollisella päättelyllä voi osoittaa, että tietyistä premisseistä seuraa tietty johtopäätös. Luonnollisella päättelyllä ei voi:

- osoittaa, että premisseistä *ei* seuraa tietty johtopäätös
- osoittaa, että kaksi lauseketta ovat keskenään yhdenpitäviä.

Kahden lausekkeen yhtäpitävyyden voi kuitenkin osoittaa suorittamalla luonnollisen päättelyn kahdesti, kahteen suuntaan. $A \Leftrightarrow B$ voidaan siis todistaa osoittamalla sekä $A \vdash B$ että $B \vdash A$. Näin tehdään tässä tutkielmassa mm. liitännäisyyksien todistuksissa.

Propositiologiikan tapauksessa lausekkeiden yhtäpitävyyden voi osoittaa myös muilla menetelmillä, kuten totuustaululla. Tässä tutkielmassa käytetään totuustaulua muutaman sellaisen todistuksen tapauksessa, joista muuten tulisi luonnollisella päättelyllä lukukelvottoman pitkiä.

2. Korollaarisäännöt

Kaksoisnegaation tuonti

Lause 2.1.

$$p \vdash \neg\neg p$$

Negaation eliminointisääntö (s. 5) on $\neg\neg p \vdash p$. Sääntö pätee todellisuudessa molempiin suuntiin: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$.[RK13, s.25] Luonnollisen päättelyn säännöt ovat kuitenkin niin tarkkaan rajatut, että tämä vaatii erillisen todistuksen.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $\neg p$ on tosi. Koska p on tosi, tällöin päädytään ristiriitaan: $p \wedge \neg p$. Täten vastaoletus on hylättävä, joten $\neg p$ on epätosi; tämän vastakohta $\neg\neg p$ on tosi. Koko päättely on siis:

$$\cfrac{\cfrac{p \qquad [\neg p]_1}{p \wedge \neg p}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}}{\neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1}\ .$$

□

Disjunktion eliminoinnin korollaari

Lause 2.2.

$$\{p \vee q, p \to q\} \vdash q$$

$$\{p \vee q, q \to p\} \vdash p$$

Normaali disjunktion eliminointi perustuu siihen, että jos disjunktion molemmista haaroista voidaan päätellä sama lopputulos, lopputulos itsessään kelpaa johtopäätökseksi. Tämä pätee myös silloin, kun lopputulos on sama kuin toinen disjunktion haaroista. Toisinsanoen:

$$\cfrac{p \vee q \qquad \begin{matrix}[p]_1\\ \vdots\\ q\end{matrix} \qquad [q]_2}{q}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E},1,2} \qquad \text{ja} \qquad \cfrac{p \vee q \qquad [p]_1 \qquad \begin{matrix}[q]_2\\ \vdots\\ p\end{matrix}}{p}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E},1,2}\ .$$

Todistus. Kun ylläolevaan päättelyyn kirjataan implikaation eliminointi, saadaan lauseessa esitetyille kahdelle tapaukselle alla esitetyt päättelypuut, jotka eroavat vain siinä, kumpi haara disjunktiosta voidaan päätellä toisesta.

$$\cfrac{p \vee q \qquad \cfrac{p \to q \qquad [p]_1}{q}\,{\scriptstyle \to\mathrm{E}} \qquad [q]_2}{q}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E},1,2} \qquad \cfrac{p \vee q \qquad [p]_1 \qquad \cfrac{q \to p \qquad [q]_2}{p}\,{\scriptstyle \to\mathrm{E}}}{p}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E},1,2}$$

□

3. Implikaatiosäännöt

Seuraavat säännöt ovat vieruskäsitteitä aiemmin sivulla 3 käsitellylle säännölle *modus ponens.*

Modus tollens

Lause 3.1.

$$\{p \to q, \neg q\} \vdash \neg p$$

Seurauksen kielto, tunnetummin *modus tollens*, joskus *modus tollendo tollens*[Lem92, s.61], on päättelysääntö, jossa todetaan, että jos premissistä syntyy seuraus, ja seuraus ei päde, tällöin premissikään ei päde.

Todistus. Modus tollens muodostetaan vastaoletuksen p kautta. Tällöin saavutaan päätelmään, jossa q olisi tosi; koska q on kuitenkin epätosi, vastaoletus on hylättävä (*reductio ad absurdum*), joten p on epätosi. Päättelypuuksi tulee siis:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to q \qquad [p]_1}{q}\,{\scriptstyle \to \mathrm{E}} \qquad \neg q}{q \wedge \neg q}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{I}}}{\neg p}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I}, 1} \; .$$

□

Transpositio

Lause 3.2.

$$p \to q \vdash \neg q \to \neg p$$

Todistus. Tämä todistus johtaa *modus tollens* -säännön implikaatiomuodossa:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to q \qquad [p]_2}{q}\,{\scriptstyle \to \mathrm{E}} \qquad [\neg q]_1}{q \wedge \neg q}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{I}}}{\neg p}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I}, 2}}{\neg q \to \neg p}\,{\scriptstyle \to \mathrm{I}, 1} \; .$$

□

Modus ponendo tollens

Lause 3.3.

$$\{\neg(p \wedge q), p\} \vdash \neg q$$

Modus ponendo tollens[Lem92, s.61] on sääntö, joka voidaan havainnollistaa seuraavanlaisella esimerkillä: ”Matti ja Minna eivät molemmat voi voittaa kilpailua. Minna voitti. Matti ei siis voittanut.”

Lauseke $\neg(p \wedge q)$ voidaan De Morganin sääntöjen nojalla kirjoittaa muotoon $\neg p \vee \neg q$. Tiedetään p. Tällöin *modus tollendo ponens*in nojalla $\neg p$ ei voi olla toteutuva haara, joten lausekkeen $\neg q$ on oltava tosi.

$$\cfrac{\cfrac{\neg(p \wedge q)}{\neg p \vee \neg q}\ \textit{De Morgan} \qquad p}{\neg q}\ \textit{Modus tollendo ponens}$$

Sen enempää modus tollendo ponens kuin De Morgan eivät kuitenkaan kuulu luonnollisen päättelyn tarkkaan rajattuun sääntöjoukkoon, vaikka ne ovatkin päteviä logiikan päättelysääntöjä. Olisi tietenkin mahdollista liittää molempien todistukset osaksi päättelyketjua, mutta saman lopputuloksen voi saavuttaa kauniimmin vastaoletuksen kautta.

Todistus. Esitetään vastaoletus q. Koska p on tiedetty todeksi, tällöin $p \wedge q$ on tosi. Toisaalta tiedetään, että $p \wedge q$ on epätosi. Ristiriidasta seuraa, että vastaoletus on hylättävä (*reductio ad absurdum*), joten q on epätosi. Muodostuu siis seuraavanlainen päättelypuu:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \qquad [q]_1}{p \wedge q}\ \wedge\mathrm{I} \qquad \neg(p \wedge q)}{(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)}\ \wedge\mathrm{I}}{\neg q}\ \neg\mathrm{I},1 \; .$$

□

Disjunktion syllogismi – modus tollendo ponens

> *When you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth. – Arthur Conan Doyle (1859—1930)*

Lause 3.4.

$$\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$$

Disjunktion syllogismi, paremmin tunnettu nimellä *modus tollendo ponens*[Lem92, s.61], on propositiologiikan versio Arthur Conan Doylen kuuluisasta säännöstä. Mikäli kahdesta väittämästä jompi kumpi on totta, ja tiedetään, että yksi niistä on epätosi, toisen on oltava totta.

Todistus. Tämä todistus perustuu disjunktion eliminointiin. Eliminointi tapahtuu todistamalla, että kummasta tahansa haarasta voidaan päätyä samaan johtopäätökseen. Tässä tapauksessa kiinnostava haara on p. Mikäli oletetaan p, päädytään ristiriitaan, koska premissinä oli $\neg p$. Tästä ristiriidasta seuraa *ex falso quodlibet* -periaatteen mukaisesti, että *jonkin* muun on oltava totta. Valitaan q, jolloin disjunktio voidaan redusoida muuttujaksi q:[6]

[6] Disjunktion eliminoinnin korollaari, s. 8.

$$\dfrac{p \lor q \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_1 \qquad \neg p}{p \land \neg p}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\neg\neg q}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I}}}{q}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{E}} \qquad [q]_2}{q}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{E}, 1, 2} \quad .$$

□

Välivaiheena esiintyvä $\neg\neg q$ kiertää luonnollisen päättelyn sääntöjen rajoituksen, jonka mukaan negaation tuontisääntö voi tuoda vain negaation. Heti sen perässä listattu negaation eliminaatio poistaa kaksoisnegaation, jolloin tuloksena on haluttu muuttuja q.

Hypoteettinen syllogismi

Lause 3.5.

$$\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$$

Hypoteettinen syllogismi[Lem92, s.171] kuvastaa implikaation transitiivisuutta: mikäli premissi p johtaa väittämään q, ja väittämä q johtaa väittämään r, tällöin voidaan päätellä, että premissi p johtaa väittämään r.

Todistus.

$$\dfrac{\dfrac{q \to r \qquad \dfrac{p \to q \qquad [p]_1}{q}\,{\scriptstyle \to \mathrm{E}}}{r}\,{\scriptstyle \to \mathrm{E}}}{p \to r}\,{\scriptstyle \to \mathrm{I}, 1}$$

□

Absorptio

Lause 3.6.

$$p \to q \vdash p \to (p \land q)$$

Jos päätelmästä p seuraa q, niin silloin, kun p on tosi, sekä p ja q ovat tosia.[RK13, s.25]

Todistus. Koska johtopäätöksenä on implikaatio, aloitetaan olettamalla p todeksi, ja tutkimalla mitä sen perusteella voidaan päätellä. Koska p on tosi ja $p \to q$, tällöin q on tosi. Koska p sekä q ovat tosia, tällöin $p \land q$ on tosi. Näinollen pätee $p \to (p \land q)$:

$$\dfrac{\dfrac{[p]_1 \qquad \dfrac{p \to q \qquad [p]_1}{q}\,{\scriptstyle \to \mathrm{E}}}{p \land q}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{p \to (p \land q)}\,{\scriptstyle \to \mathrm{I}, 1} \quad .$$

□

Materiaalinen implikaatio

Lause 3.7.

$$p \to q \vdash \neg p \lor q$$

Tämä sääntö johtaa implikaation määritelmän disjunktiivisessa/konjunktiivisessa normaalimuodossa.

Kielletyn kolmannen laista tiedetään, että $p \lor \neg p$. Mikäli p on totta, implikaatiosta $p \to q$ seuraa, että q on totta, joten $\neg p \lor q$. Mikäli $\neg p$ on totta, tällöin $\neg p \lor q$. Joka tapauksessa $\neg p \lor q$.

Jos voitaisiin hyväksyä $p \lor \neg p$ premissijoukkoon, päättely voitaisiin kirjoittaa näin:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \mathit{impl.}\\ \vdots\\ p \lor \neg p\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{p \to q \qquad [p]_1}{q}\,{\scriptstyle \to \mathrm{E}}}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}} \qquad \dfrac{[\neg p]_2}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}}}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{E}, 1, 2}\ .$$

Olisi täysin mahdollista sijoittaa lausekkeen $p \lor \neg p$ täysi päättely tyhjästä premissijoukosta ylläolevaan päättelyketjuun, ja se näyttäisi tältä:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_2}{p \lor \neg p}\,{\scriptstyle \lor I} \qquad [\neg(p \lor \neg p)]_1}{(p \lor \neg p) \land \neg(p \lor \neg p)}\,{\scriptstyle \land I}}{\neg p}\,{\scriptstyle \neg I, 2}}{p \lor \neg p}\,{\scriptstyle \lor I} \qquad [\neg(p \lor \neg p)]_1}{(p \lor \neg p) \land \neg(p \lor \neg p)}\,{\scriptstyle \land I}}{\neg\neg(p \lor \neg p)}\,{\scriptstyle \neg I, 1}}{p \lor \neg p}\,{\scriptstyle \neg E}}{} \qquad \dfrac{\dfrac{p \to q \qquad [p]_3}{q}\,{\scriptstyle \to E}}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor I} \qquad \dfrac{[\neg p]_4}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor I}}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor E, 3, 4}\ .$$

Mutta samaan lopputulokseen päästään lyhyemmin myös toisella päättelyketjulla.

Todistus. Lähdetään vastaoletuksesta, että $\neg p \lor q$ on epätosi. Tämän oletuksen nojalla on mahdollista osoittaa, että muuttujan p on oltava tosi. Tästä johtopäätöksestä kuitenkin seuraa ristiriita, joka osoittaa vastaoletuksen vääräksi, jolloin alkuperäinen väite tulee todistetuksi:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to q \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]_2}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}} \qquad [\neg(\neg p \lor q)]_1}{(\neg p \lor q) \land \neg(\neg p \lor q)}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I}, 2}}{p}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{E}}}{}}{q}\,{\scriptstyle \to \mathrm{E}}}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}} \qquad [\neg(\neg p \lor q)]_1}{(\neg p \lor q) \land \neg(\neg p \lor q)}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\dfrac{\neg\neg(\neg p \lor q)}{\neg p \lor q}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{E}}}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I}, 1}\ .$$

□

4. Implikaatioiden yhdistelmät

Konstruktiivinen dilemma

Lause 4.1.

$$\{p \to q, r \to s, p \lor r\} \vdash q \lor s$$

Mikä tiedetään, että kahdesta päätelmästä ainakin yhden premissi pätee, tällöin ainakin yhden päätelmän tulos pätee. Tämä päättelysääntö siis yhdistää disjunktion sekä *modus ponens*in.

Todistus. Tämä voidaan päätellä tarkastelemalla erikseen kumpaakin tapausta p ja r, ja toteamalla, että kumpikin niistä johtaa lausekkeeseen $q \lor s$:

$$\dfrac{p \lor r \qquad \dfrac{\dfrac{p \to q \qquad [p]_1}{q}\,{\to}\mathrm{E}}{q \lor s}\,{\lor}\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{r \to s \qquad [r]_2}{s}\,{\to}\mathrm{E}}{q \lor s}\,{\lor}\mathrm{I}}{q \lor s}\,{\lor}\mathrm{E}, 1, 2 \quad .$$

□

Destruktiivinen dilemma

Lause 4.2.

$$\{p \to q, r \to s, \neg q \lor \neg s\} \vdash \neg p \lor \neg r$$

Mikä tiedetään, että kahdesta päätelmästä ainakin yhden tulos ei päde, tällöin ainakin yhden premissi ei myöskään päde. Tämä päättelysääntö siis yhdistää disjunktion sekä *modus tollens*in.

Todistus. Tämä voidaan päätellä tarkastelemalla erikseen kumpaakin tapausta $\neg q$ ja $\neg s$, ja toteamalla, että kumpikin niistä johtaa lausekkeeseen $\neg p \lor \neg r$. Tämä toteutetaan kummassakin haarassa ristiriitatodistuksen kautta:

$$\dfrac{\neg q \lor \neg s \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to q \qquad [p]_3}{q}\,{\to}\mathrm{E} \qquad [\neg q]_1}{q \land \neg q}\,{\land}\mathrm{I}}{\neg p}\,\neg\mathrm{I}, 3}{\neg p \lor \neg r}\,{\lor}\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \to s \qquad [r]_4}{s}\,{\to}\mathrm{E} \qquad [\neg s]_2}{s \land \neg s}\,{\land}\mathrm{I}}{\neg r}\,\neg\mathrm{I}, 4}{\neg p \lor \neg r}\,{\lor}\mathrm{I}}{\neg p \lor \neg r}\,{\lor}\mathrm{E}, 1, 2 \quad .$$

□

Resoluutio

Lause 4.3.

$$\{p \lor q, \neg p \lor r\} \vdash q \lor r$$

Oletetaan, että p on epätosi. Jotta $p \lor q$ voisi olla totta, tällöin q on oltava totta. Oletetaan sitten, että p on tosi. Jotta $\neg p \lor r$ voisi olla totta, tällöin r on oltava totta. Näin ollen riippumatta siitä, onko p tosi, näistä premisseistä seuraa, että $q \lor r$ on oltava totta.

Tätä päättelyä ei voi suoraan hyödyntää todistuksena luonnollisessa päätelyssä, koska mitä tahansa oletuksia ei voi esittää spontaanisti. Todistuksen saa kuitenkin toimimaan pienin muutoksin. Otetaan käsittelyyn disjunktio $p \vee r$. Oletetaan ensin, että p on tosi. Tällöin lauseesta $\neg p \vee r$ voidaan modus tollendo ponensin perusteella johtaa, että r on oltava totta. Koska r on totta, $q \vee r$ on totta. Oletetaan sitten toisessa haarassa, että q on tosi. Tällöin myös $q \vee r$ on totta. Kummassakin tapauksessa $q \vee r$ on totta, siispä $q \vee r$ on totta.

Todistus.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \vee q$}
\AxiomC{$\neg p \vee r$}
\AxiomC{$[p]_1$}
\AxiomC{$[\neg p]_3$}
\RightLabel{$\wedge$I}
\BinaryInfC{$p \wedge \neg p$}
\RightLabel{$\neg$I}
\UnaryInfC{$\neg\neg r$}
\RightLabel{$\neg$E}
\UnaryInfC{r}
\AxiomC{$[r]_4$}
\RightLabel{$\vee$E, 3, 4}
\TrinaryInfC{r}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\AxiomC{$[q]_2$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\RightLabel{$\vee$E, 1, 2}
\TrinaryInfC{$q \vee r$}
\end{prooftree}
$$ □

Yhden rivin lyhyempi päättely samalle lopputulokselle on esitetty alla. Tässä modus tollendo ponensiin sisältyvästä ristiriidasta on suoraan johdettu $q \vee r$ (*ex falso quodlibet*), mikä säästää yhden rivin paperipinta-alaa intuitiivisen ymmärryksen kustannuksella:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \vee q$}
\AxiomC{$\neg p \vee r$}
\AxiomC{$[p]_1$}
\AxiomC{$[\neg p]_3$}
\RightLabel{$\wedge$I}
\BinaryInfC{$p \wedge \neg p$}
\RightLabel{$\neg$I}
\UnaryInfC{$\neg\neg(q \vee r)$}
\RightLabel{$\neg$E}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\AxiomC{$[r]_4$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\RightLabel{$\vee$E, 3, 4}
\TrinaryInfC{$q \vee r$}
\AxiomC{$[q]_2$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\RightLabel{$\vee$E, 1, 2}
\TrinaryInfC{$q \vee r$}
\end{prooftree}
.
$$

5. De Morganin lait

De Morganin lait ovat tunnettuja lauselogiikan sekä Boolen algebran päättelysääntöjä, joita hyödynnetään myös mm. joukko-opissa ja digitaalielektroniikassa.[RK13, s.26]

Negaatioiden konjunktio on disjunktion negaatio

Lause 5.1.

$$\neg p \land \neg q \Leftrightarrow \neg(p \lor q)$$

Todistus. Todistetaan ensin $\neg(p \lor q) \vdash \neg p \land \neg q$. Konjunktio muodostetaan kahdesta haarasta, joissa kummassakin negaatio johdetaan vastaoletuksen kautta:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_1}{p \lor q}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad \neg(p \lor q)}{(p \lor q) \land \neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg p}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q]_2}{p \lor q}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad \neg(p \lor q)}{(p \lor q) \land \neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg q}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},2}}{\neg p \land \neg q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}} .$$

Todistetaan sitten $\neg p \land \neg q \vdash \neg(p \lor q)$. Todistus lähtee vastaoletuksesta $p \lor q$. Tämä vastaoletus puretaan osiin osoittamalla, että olipa sitten p tai q tosi, tuloksena olisi joka tapauksessa ristiriita. Alla on esitetty todistus yksinkertaisemmassa muodossa, missä ristiriitaa on merkitty symbolilla $\bot$:

$$\dfrac{\dfrac{[p \lor q]_1 \qquad \dfrac{[p]_2 \qquad \dfrac{\neg p \land \neg q}{\neg p}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E}}}{\bot}\,{\scriptstyle \bot} \qquad \dfrac{[q]_3 \qquad \dfrac{\neg p \land \neg q}{\neg q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{E}}}{\bot}\,{\scriptstyle \bot}}{\bot}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E},2,3}}{\neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1} .$$

Koska ristiriita on klassisessa logiikassa merkittävä konjunktiolla ja disjunktion eliminoinnin pitää tuottaa molemmista haaroista sama johtopäätös, oikeanpuoleisessa haarassa on tämän takia keinotekoinen muunnos *ex falso quodlibet* -periaatetta hyödyntäen ristiriidasta $q \land \neg q$ ristiriitaan $p \land \neg p$:

$$\dfrac{\dfrac{[p \lor q]_1 \qquad \dfrac{[p]_2 \qquad \dfrac{\neg p \land \neg q}{\neg p}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E}}}{p \land \neg p}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q]_3 \qquad \dfrac{\neg p \land \neg q}{\neg q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{E}}}{q \land \neg q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg(p \land \neg p)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}}}{p \land \neg p}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{p \land \neg p}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E},2,3}}{\neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1} .$$

□

Prosessissa ei voi oikaista muodostamalla lauseke $\neg(p \lor q)$ suoraan ristiriidasta kummassakin haarassa, koska tällöin väliaikainen oletus $p \lor q$ syntyisi ikään kuin tyhjästä. Väliaikaista oletusta voi käyttää vain sen päättelyn yläpuolella, jonka tueksi se on luotu, ei sen alapuolella. Seuraavanlainen päättely olisi siis virheellinen:

$$\dfrac{[p \lor q]_{???} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_2 \quad \dfrac{\neg p \land \neg q}{\neg p}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E}}}{p \land \neg p}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},\, ???}}{\neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q]_3 \quad \dfrac{\neg p \land \neg q}{\neg q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{E}}}{q \land \neg q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},\, ???}}{\neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg(p \lor q)}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E},\, 2,\, 3} \; .$$

Negaatioiden disjunktio on konjunktion negaatio

Lause 5.2.

$$\neg p \lor \neg q \Leftrightarrow \neg(p \land q)$$

Todistus. Todistetaan ensin $\neg(p \land q) \vdash \neg p \lor \neg q$. Nyt vastaoletuksena käytetään lausetta $\neg(\neg p \lor \neg q)$. Usea sisäkkäinen negaatio edellyttää monivaiheista todistusta. Ensin tätä vastaoletusta hyödynnetään sen todistamiseen, että muuttujan p on tämän oletuksen nojalla oltava tosi. Sen jälkeen osoitetaan, että tämän oletuksen vallitessa q ei voi olla samaikaisesti tosi. Vasta kun q on osoitettu epätodeksi, saadaan aikaan ristiriita, jonka nojalla alkuperäinen vastaoletus voidaan hylätä:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]_3}{\neg p \lor \neg q}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \quad [\neg(\neg p \lor \neg q)]_1}{(\neg p \lor \neg q) \land \neg(\neg p \lor \neg q)}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},\, 3}}{p}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}} \quad [q]_2}{p \land q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}} \quad \neg(p \land q)}{(p \land q) \land \neg(p \land q)}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg q}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},\, 2}}{\neg p \lor \neg q}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \quad [\neg(\neg p \lor \neg q)]_1}{(\neg p \lor \neg q) \land \neg(\neg p \lor \neg q)}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg(\neg p \lor \neg q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},\, 1}}{\neg p \lor \neg q}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}} \; .$$

Todistetaan sitten $\neg p \lor \neg q \vdash \neg(p \land q)$. Äskeiseen verrattuna tämä todistus on sangen yksinkertainen: vastaoletus $p \land q$ johtaa ristiriitaan disjunktion $\neg p \lor \neg q$ kummassakin haarassa:

$$\dfrac{\neg p \lor \neg q \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \land q]_3}{p}\,{\scriptstyle \land\mathrm{E}} \quad [\neg p]_1}{p \land \neg p}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg(p \land q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},\, 3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \land q]_4}{q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{E}} \quad [\neg q]_2}{q \land \neg q}\,{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg(p \land q)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I},\, 4}}{\neg(p \land q)}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E},\, 1,\, 2} \; .$$

□

Käänteiset muodot

Joskus De Morganin lait on tarpeen muodostaa käänteisessä muodossa, jossa paljaasta konjunktiosta tai disjunktiosta johdetaan sen vastineversio, tai toisinpäin:

Lause 5.3.

$$\neg(\neg p \lor \neg q) \Leftrightarrow p \land q$$

Todistus. Todistetaan ensin $p \land q \vdash \neg(\neg p \lor \neg q)$. Alla on esitetty todistus yksinkertaisemmassa muodossa, missä ristiriitaa on merkitty symbolilla $\bot$:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg p \lor \neg q]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{p \land q}{p}{\scriptstyle \land\mathrm{E}} \qquad [\neg p]_2}{\bot}{\scriptstyle \bot} \qquad \dfrac{\dfrac{p \land q}{q}{\scriptstyle \land\mathrm{E}} \qquad [\neg q]_3}{\bot}{\scriptstyle \bot}}{\bot}{\scriptstyle \lor\mathrm{E},2,3}}{\neg(\neg p \lor \neg q)}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1} .$$

Koska ristiriita on klassisessa logiikassa kuitenkin merkittävä konjunktiolla, todistuksesta tulee hieman pitempi:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg p \lor \neg q]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{p \land q}{p}{\scriptstyle \land\mathrm{E}} \qquad [\neg p]_2}{p \land \neg p}{\scriptstyle \land\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \land q}{q}{\scriptstyle \land\mathrm{E}} \qquad [\neg q]_3}{q \land \neg q}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg(p \land \neg p)}{\scriptstyle \neg\mathrm{I}}}{p \land \neg p}{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{p \land \neg p}{\scriptstyle \lor\mathrm{E},2,3}}{\neg(\neg p \lor \neg q)}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1} .$$

Todistetaan sitten $\neg(\neg p \lor \neg q) \vdash p \land q$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]_1}{\neg p \lor \neg q}{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad \neg(\neg p \lor \neg q)}{(\neg p \lor \neg q) \land \neg(\neg p \lor \neg q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg p}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1}}{p}{\scriptstyle \neg\mathrm{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg q]_2}{\neg p \lor \neg q}{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad \neg(\neg p \lor \neg q)}{(\neg p \lor \neg q) \land \neg(\neg p \lor \neg q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg q}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},2}}{q}{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{p \land q}{\scriptstyle \land\mathrm{I}} .$$

$\square$

Lause 5.4.

$$\neg(\neg p \land \neg q) \Leftrightarrow p \lor q$$

Todistus. Todistetaan ensin $p \lor q \vdash \neg(\neg p \land \neg q)$. Nyt osoitetaan, että oletus $\neg p \land \neg q$ johtaa disjunktion kummassakin haarassa ristiriitaan. Ristiriidasta päätellään todistuksen päämäärä $\neg(\neg p \land \neg q)$:

$$\dfrac{p \lor q \qquad \dfrac{\dfrac{[p]_1 \qquad \dfrac{[\neg p \land \neg q]_3}{\neg p}{\scriptstyle \land\mathrm{E}}}{p \land \neg p}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg(\neg p \land \neg q)}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},3} \qquad \dfrac{\dfrac{[q]_2 \qquad \dfrac{[\neg p \land \neg q]_4}{\neg q}{\scriptstyle \land\mathrm{E}}}{q \land \neg q}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg(\neg p \land \neg q)}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},4}}{\neg(\neg p \land \neg q)}{\scriptstyle \land\mathrm{E},1,2} .$$

Sen jälkeen todistetaan $\neg(\neg p \land \neg q) \vdash p \lor q$.
Hyödynnetään ensin kahta osatodistusta:

$$\begin{array}{c}\neg(p \lor q)\\ \mathcal{R}\\ \neg p\end{array} \quad = \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_1}{p \lor q}{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad \neg(p \lor q)}{(p \lor q) \land \neg(p \lor q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg p}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1}$$

ja

$$\begin{array}{c}\neg(p \lor q)\\ \mathcal{Q}\\ \neg q\end{array} \quad = \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q]_1}{p \lor q}{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad \neg(p \lor q)}{(p \lor q) \land \neg(p \lor q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg q}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1} \; .$$

Tällöin:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(p \lor q)]_1\\ \mathcal{R}\\ \neg p\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg(p \lor q)]_1\\ \mathcal{Q}\\ \neg q\end{array}}{\neg p \land \neg q}{\scriptstyle \land\mathrm{I}} \qquad \neg(\neg p \land \neg q)}{(\neg p \land \neg q) \land \neg(\neg p \land \neg q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg(p \lor q)}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1}}{p \lor q}{\scriptstyle \neg\mathrm{E}} \; .$$

Yhdistettynä:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_2}{p \lor q}{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad [\neg(p \lor q)]_1}{(p \lor q) \land \neg(p \lor q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg p}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q]_3}{p \lor q}{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad [\neg(p \lor q)]_1}{(p \lor q) \land \neg(p \lor q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg q}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},3}}{\neg p \land \neg q}{\scriptstyle \land\mathrm{I}} \qquad \neg(\neg p \land \neg q)}{(\neg p \land \neg q) \land \neg(\neg p \land \neg q)}{\scriptstyle \land\mathrm{I}}}{\neg\neg(p \lor q)}{\scriptstyle \neg\mathrm{I},1}}{p \lor q}{\scriptstyle \neg\mathrm{E}} \; .$$

$\square$

6. Idempotenssilait

Määritelmä 6.1. Matematiikassa idempotenssi tarkoittaa, että operaatio tuottaa saman tuloksen riippumatta siitä, montako kertaa se toistetaan.

Nämä lait pätevät molempiin suuntiin: ”jos ja vain jos lauseke 1 pätee, niin lauseke 2 pätee”. Tämän takia todistukset esitetään molempiin suuntiin.

Idempotenssi pätee konjunktiolle ja disjunktiolle[RK13, s.25], mutta implikaatiolle ja ekvivalenssille se ei päde: $p \to p$ ja $p \leftrightarrow p$ ovat molemmat tosia riippumatta muuttujan p arvosta, siis myös silloin kun p on epätosi (kts. luku 10). Myöskään negaatiolle se ei päde, sillä $\neg p$ on ilmiselvästi eri kuin p.

Konjunktion idempotenssin laki

Lause 6.2.

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

Todistus. Päätelmät $p \vdash p \wedge p$ ja $p \wedge p \vdash p$ seuraavat välittömästi konjunktion tuontisäännöstä $\dfrac{p \quad p}{p \wedge p}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}$ ja eliminointisäännöstä $\dfrac{p \wedge p}{p}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}$. □

Disjunktion idempotenssin laki

Lause 6.3.

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Todistus. Päätelmät $p \vdash p \vee p$ ja $p \vee p \vdash p$ seuraavat välittömästi disjunktion tuontisäännöstä $\dfrac{p}{p \vee p}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}}$ ja eliminointisäännöstä $\dfrac{p \vee p \qquad [p]_1 \qquad [p]_2}{p}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E},\,1,\,2}$. □

7. Vaihdannaisuuslait

Määritelmä 7.1. Matematiikassa vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus tarkoittaa, että jos jokin kuvitteellinen matemaattinen operaatio $\star$ on vaihdannainen, tällöin $a \star b \Leftrightarrow b \star a$: Operandien järjestys ei muuta tulosta.[RK13, s.25]

Koska vaihdannaislakien todistuksissa suunnan vaihtaminen tarkoittaa vain triviaalia muuttujien nimien vaihtamista keskenään, kaikki vaihdannaisuustodistukset esitetään tässä vain yhteen suuntaan.

Konjunktion vaihdannaisuus

Lause 7.2.

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Todistus. Konjunktion vaihdannaisuus voidaan päätellä yhdistämällä konjunktion eliminointi- ja tuontisäännöt:

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{p \wedge q}{p}\wedge\mathrm{E}}{q \wedge p}\wedge\mathrm{I}\ .$$

□

Disjunktion vaihdannaisuus

Lause 7.3.

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Todistus. Disjunktion vaihdannaisuus voidaan päätellä yhdistämällä disjunktion tuonti- ja eliminointisäännöt:

$$\dfrac{p \vee q \qquad \dfrac{[p]_1}{q \vee p}\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{[q]_2}{q \vee p}\vee\mathrm{I}}{q \vee p}\vee\mathrm{E}, 1, 2\ .$$

□

Ekvivalenssin vaihdannaisuus

Lause 7.4.

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$$

Todistus. Ekvivalenssin vaihdannaisuus voidaan päätellä yhdistämällä ekvivalenssin eliminointi- ja tuontisäännöt:

$$\dfrac{\dfrac{p \leftrightarrow q \qquad [q]_1}{p}\leftrightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{p \leftrightarrow q \qquad [p]_2}{q}\leftrightarrow\mathrm{E}}{q \leftrightarrow p}\leftrightarrow\mathrm{I}, 1, 2\ .$$

□

Implikaation vaihdannaisuus, permutaatiolaki

Lause 7.5.

$$p \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (p \to r)$$

Implikaation vaihdannaisuus näyttää hieman erilaiselta kuin muut vaihdannaisuuslait. Sillä on myös toinen nimitys, permutaatiolaki[7]. Laki ilmaisee esimerkiksi sen, että väittämät ”mikäli konttorilla on valot päällä, tiedetään että jos Matti on siellä, hän työskentelee” ja ”mikäli Matti on konttorilla, niin mikäli siellä on valot päällä, hän työskentelee” ovat yhdenpitävät. Se siis sallii kahden sisäkkäisen implikaation premissien vaihtamisen keskenään. Tämä eroaa liitännäisyyslaista, sillä liitännäisyydessä vaihdetaan sulkujen paikkaa mutta ei muuttujien järjestystä. Tässä vaihdetaan muuttujien järjestystä. Implikaatio ei ole liitännäinen.

Erityisesti on kuitenkin syytä huomata, että $p \to q \not\Leftrightarrow q \to p$. Vaikka premissejä voi vaihtaa keskenään, premissejä ja seurauksia ei voi vaihtaa keskenään.

Todistus. Todistus perustuu implikaation $q \to (p \to r)$ muodostamiseen olettamalla q todeksi, ja osoittamalla, että tästä oletuksesta seuraa $p \to r$. Implikaatio $p \to r$ puolestaan muodostetaan olettamalla p todeksi, ja osoittamalla, että tästä oletuksesta seuraa r. Tämä on mahdollista, koska tätä sisempää todistusta tehtäessä vallitsee yhä ulompi oletus siitä, että q on tosi. Päättelypuuksi muodostuu siis:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to (q \to r) \qquad [p]_2}{q \to r}{\scriptstyle \to \mathrm{E}} \qquad [q]_1}{r}{\scriptstyle \to \mathrm{E}}}{p \to r}{\scriptstyle \to \mathrm{I},2}}{q \to (p \to r)}{\scriptstyle \to \mathrm{I},1} .$$

□

[7] Vertaa hypoteettiseen syllogismiin (s. 11).

8. Liitännäisyyslait

Määritelmä 8.1. Matematiikassa liitännäisyys eli assosiatiivuus tarkoittaa, että jos jokin kuvitteellinen matemaattinen operaatio $\star$ on liitännäinen, tällöin $a \star (b \star c) \Leftrightarrow (a \star b) \star c$: Sulkujen paikan vaihtaminen ei muuta tulosta.

Konjunktio, disjunktio ja ekvivalenssi ovat liitännäisiä, mutta implikaatio ei ole.[RK13, s.25]

Konjunktion liitännäisyys

Lause 8.2.

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Todistus. Todistus kumpaankin suuntaan onnistuu ilman yhtään väliaikaista oletusta, perustuen yksinomaan konjunktion tuonti- ja eliminointisääntöihin.

Todistetaan ensin $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \wedge q) \wedge r}{p \wedge q}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{p}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \wedge q) \wedge r}{p \wedge q}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{q}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}} \qquad \dfrac{(p \wedge q) \wedge r}{r}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{q \wedge r}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}}{p \wedge (q \wedge r)}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}} \;.$$

Todistetaan sitten $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \wedge (q \wedge r)}{p}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{p \wedge (q \wedge r)}{q \wedge r}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{r}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{p \wedge q}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\dfrac{p \wedge (q \wedge r)}{q \wedge r}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{r}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{(p \wedge q) \wedge r}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}} \;.$$

□

Disjunktion liitännäisyys

Lause 8.3.

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

Todistus. Myös tämä todistus perustuu yksinomaan disjunktion tuonti- ja eliminointisääntöihin.

Todistetaan ensin $p \vee (q \vee r) \vdash (p \vee q) \vee r$:

$$\dfrac{(p \vee q) \vee r \qquad \dfrac{\dfrac{[p \vee q]_1}{p}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}}}{p \vee (q \vee r)}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\dfrac{[r]}{q \vee r}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}}}{p \vee (q \vee r)}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}}}{p \vee (q \vee r)}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E},1,2} \;.$$

Todistetaan sitten $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$:

$$\dfrac{p \vee (q \vee r) \qquad \dfrac{\dfrac{[p]_1}{p \vee q}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}}}{(p \vee q) \vee r}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\dfrac{[q \vee r]_2}{r}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}}}{(p \vee q) \vee r}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}}}{(p \vee q) \vee r}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E},1,2} \;.$$

□

Ekvivalenssin liitännäisyys

Lause 8.4.

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

Todistus. Tämän yhtäläisyyden toteaminen luonnollisella päättelyllä on niin monimutkaista, että siitä tulisi monisivuinen kaavio, jonka päättelyiden seuraaminen olisi lähes mahdotonta.

Siksi tämä todistus on poikkeuksellisesti laadittu totuustaulun muodossa. Koska muuttujia on kolme kappaletta, tarkasteltavia alkeistapauksia on vain $2^3 = 8$ kappaletta. Totuustaulu on esitetty alla.

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Totuustaulusta voidaan nähdä, että kummankin lausekkeen, $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ ja $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$, totuusarvot ovat kaikilla muuttujien arvoilla samat, joten lausekkeet ovat keskenään yhdenpitävät. □

9. Osittelulait

Määritelmä 9.1. Osittelulaki eli distributiivisuus tarkoittaa, että kahdelle matemaattiselle operaatiolle $\star$ ja $\circledast$ pätevät nämä kaksi lainalaisuutta:[RK13, s.25]

$$(p \circledast q) \star r \Leftrightarrow (p \star r) \circledast (q \star r) \tag{9.2}$$

$$(p \star r) \circledast (p \star q) \Leftrightarrow p \star (r \circledast q) \tag{9.3}$$

Kaava (9.2) kuvaa osittelulain oikealta puolelta, ja kaava (9.3) vasemmalta puolelta. Kun molemmat säännöt toteutuvat, sanotaan, että operaatio $\star$ on distributiivinen operaation $\circledast$ suhteen.

Disjunktio on distributiivinen kaikkien neljän peruskonnektiivin suhteen (negaatiota ei lasketa, koska se on unäärinen), konjunktio disjunktion sekä itsensä suhteen, ja implikaatio kaikkien neljän suhteen, mutta ainoastaan vasemmalta puolelta.[8]

Koska kaksisuuntainen todistus luonnollisella päättelyllä vaatii kaksi todistusta jokaista sääntöä kohti, näistä tulisi yhteensä $2 \cdot (4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = 32$ todistusta. Todistukset veisivät kohtuuttomasti paperitilaa. Siksi nämä säännöt todistetaan nyt ennemmin totuustaulujen avulla. Tällöin totuustauluja tarvitaan 16 kappaletta. Kukin todistus ilmenee siitä, että totuustaulun kaksi oikeanpuoleista saraketta ovat yhdenpitävät.

Osittelu: disjunktio konjunktion suhteen

Lause 9.4.

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

[8] Disjunktio samaistetaan joissain yhteyksissä aritmeettiseen yhteenlaskuun ja konjunktio aritmeettiseen kertolaskuun. Kuten yhteenlaskulla, disjunktiollakin on neutraalialkiona 0 (epätosi), ja konjunktiolla on neutraalialkiona 1 (tosi) kuten kertolaskullakin. Kertolaskuoperaatio on kyllä distributiivinen yhteenlaskuoperaation suhteen, mutta sama ei päde toisinpäin, eikä kumpikaan ole distributiivinen itsensä suhteen. Disjunktio ja konjunktio ovat molemmat distributiivisia sekä toistensa sekä itsensä suhteen.

Yhtäläisyys $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \wedge q) \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\square$

Osittelu: disjunktio disjunktion suhteen

Lause 9.5.

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r)$$

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \vee (q \vee r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Yhtäläisyys $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \vee (q \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$(p \vee r) \vee (q \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\square$

Osittelu: disjunktio implikaation suhteen

Lause 9.6.

$$p \vee (q \to r) \Leftrightarrow (p \vee q) \to (p \vee r)$$

$$(p \to q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \to (q \vee r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \vee (q \to r) \Leftrightarrow (p \vee q) \to (p \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \to r$	$p \vee (q \to r)$	$(p \vee q) \to (p \vee r)$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Yhtäläisyys $(p \to q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \to (q \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \to q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \to q) \vee r$	$(p \vee r) \to (q \vee r)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Osittelu: disjunktio ekvivalenssin suhteen

Lause 9.7.

$$p \vee (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$$

$$(p \leftrightarrow q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \leftrightarrow (q \vee r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \vee (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \leftrightarrow r$	$p \vee (q \leftrightarrow r)$	$(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Yhtäläisyys $(p \leftrightarrow q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \leftrightarrow (q \vee r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \leftrightarrow q) \vee r$	$(p \vee r) \leftrightarrow (q \vee r)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\square$

Osittelu: konjunktio konjunktion suhteen

Lause 9.8.

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \wedge (q \wedge r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Yhtäläisyys $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \wedge (q \wedge r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$(p \wedge r) \wedge (q \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Osittelu: konjunktio disjunktion suhteen

Lause 9.9.

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Yhtäläisyys $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Osittelu: implikaatio konjunktion suhteen

Lause 9.10.

$$p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Yhtäläisyys $(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$ ei päde; implikaation osittelu konjunktion suhteen pätee siis vain vasemmalta puolelta.

Osittelu: implikaatio disjunktion suhteen

Lause 9.11.

$$p \to (q \vee r) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \to (q \vee r) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$(p \to q) \vee (p \to r)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Yhtäläisyys $(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \vee (q \to r)$ ei päde; implikaation osittelu disjunktion suhteen pätee siis vain vasemmalta puolelta.

Osittelu: implikaatio implikaation suhteen

Lause 9.12.

$$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \to q) \to (p \to r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \to q) \to (p \to r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$(p \to q) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Yhtäläisyys $(p \to q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \to (q \to r)$ ei päde; implikaation osittelu implikaation suhteen pätee siis vain vasemmalta puolelta.

Osittelu: implikaatio ekvivalenssin suhteen

Lause 9.13.

$$p \to (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$$

Todistus. Yhtäläisyys $p \to (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$ voidaan todeta alla esitetystä totuustaulusta.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$q \leftrightarrow r$	$p \to (q \leftrightarrow r)$	$(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Yhtäläisyys $(p \leftrightarrow q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \leftrightarrow (q \to r)$ ei päde; implikaation osittelu ekvivalenssin suhteen pätee siis vain vasemmalta puolelta.

10. Tautologiat

Määritelmä 10.1. Tautologia on propositiolause, joka on aina tosi riippumatta muuttujien arvoista. Kaikki tässä tutkielmassa esitetyt todistukset ovat muutettavissa tautologioiksi siten, että lauseke muotoa $A \vdash B$ kirjoitetaan muodossa $\vdash A \to B$, lauseke muotoa $\{A, B\} \vdash C$ kirjoitetaan muodossa $\vdash (A \wedge B) \to C$, ja lauseke muotoa $A \Leftrightarrow B$ kirjoitetaan muodossa $\vdash A \leftrightarrow B$. Tämän todistaminen jätetään lukijalle harjoitukseksi. Tässä kappaleessa keskitytään sellaisiin tautologioihin, jotka voi esittää ainoastaan ilman oletuksia. Esimerkiksi todistusta $\vdash ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$ ei esitetä tautologiana, koska sen voi myös esittää muodossa $\{p \to q, \neg q\} \vdash \neg p$ (*modus tollens*).

10.1. Refleksiivisyydet

Määritelmä 10.2. Propositiologiikan operaatio $\star$ on refleksiivinen, jos $A \star A$ on aina tosi riippumatta muuttujan A arvosta. Implikaatio ja ekvivalenssi ovat refleksiivisiä. Sen sijaan esimerkiksi disjunktio ei ole refleksiivinen, sillä $A \vee A$ on tosi vain mikäli muuttuja A on tosi.

Implikaation refleksiivisyys

Lause 10.3.

$$\vdash p \to p$$

Todistus. Todistus seuraa suoraan tuontisäännöstä $\dfrac{[p]_1}{p \to p} \to \mathrm{I}, 1$. □

Ekvivalenssin refleksiivisyys

Lause 10.4.

$$\vdash p \leftrightarrow p$$

Todistus. Todistus seuraa suoraan tuontisäännöstä $\dfrac{[p]_1 \qquad [p]_2}{p \leftrightarrow p} \leftrightarrow \mathrm{I}, 1, 2$. □

10.2. Implikaation totaalisuus

Lause 10.5.

$$\vdash (p \to q) \vee (q \to p)$$

Toinen nimitys tälle käsitteelle on, että implikaatio on vahvasti yhtenäinen (strongly connected relation). Yhtenäisyys on vahvaa, sillä relaatio pätee silloinkin kun $p \equiv q$.

Todistus. Todistus alkaa vastaoletuksella $\neg((p \to q) \vee (q \to p))$. Nyt pyritään osoittamaan, että tämä vastaoletus johtaa ristiriitaan olipa p sitten tosi tai epätosi. Oletetaan ensin, että p on tosi. Tällöin implikaatio $q \to p$ on tosi, sillä tosi päätelmä on tosi riippumatta premisseistä[9]. Nyt disjunktion tuontisäännön nojalla voidaan todeta, että $(p \to q) \vee (q \to p)$ on tosi. Tämä on kuitenkin ristiriita alkuperäisen vastaoletuksen kanssa. Siispä muuttuja p ei voi olla tosi, vaan sen on oltava epätosi. Siitä, että p on epätosi, seuraa, että implikaatio $p \to q$ on tosi, sillä epätosi premissi voi johtaa kumpaan tahansa päätelmään[10]. Kun $p \to q$ on tosi, tällöin $(p \to q) \vee (q \to p)$ on tosi disjunktion tuontisäännön nojalla. Tämä on edelleenkin ristiriita alkuperäisen vastaoletuksen kanssa. Vastaoletus on siis kumottu, ja haluttu väite on osoitettu todeksi. Päättelypuu on esitetty alla.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[p]_2$}
\AxiomC{$[p]_3$}
\RightLabel{$\to$I}
\UnaryInfC{$q \to p$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$(p \to q) \vee (q \to p)$}
\AxiomC{$[\neg((p \to q) \vee (q \to p))]_1$}
\RightLabel{$\wedge$I}
\BinaryInfC{$((p \to q) \vee (q \to p)) \wedge \neg((p \to q) \vee (q \to p))$}
\RightLabel{$\neg$I, 3}
\UnaryInfC{$\neg p$}
\RightLabel{$\wedge$I}
\BinaryInfC{$p \wedge \neg p$}
\RightLabel{$\neg$I}
\UnaryInfC{$\neg\neg q$}
\RightLabel{$\neg$E}
\UnaryInfC{q}
\RightLabel{$\to$I, 2}
\UnaryInfC{$p \to q$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$(p \to q) \vee (q \to p)$}
\AxiomC{$[\neg((p \to q) \vee (q \to p))]_1$}
\RightLabel{$\wedge$I}
\BinaryInfC{$((p \to q) \vee (q \to p)) \wedge \neg((p \to q) \vee (q \to p))$}
\RightLabel{$\neg$I, 1}
\UnaryInfC{$\neg\neg((p \to q) \vee (q \to p))$}
\RightLabel{$\neg$E}
\UnaryInfC{$(p \to q) \vee (q \to p)$}
\end{prooftree}
.
$$

□

10.3. Kielletyn kolmannen laki

Lause 10.6.

$$\vdash p \vee \neg p$$

Kielletyn kolmannen laki, *principium exclusi terti*, tarkoittaa, että propositiolla on aina oltava totuusarvo: Sen on oltava tosi tai epätosi.

Todistus alkaa vastaoletuksesta: $\neg(p \vee \neg p)$. Mikäli merkitään $q = \neg p$, lauseke voidaan kirjoittaa uudelleen muotoon $\neg(p \vee q)$. De Morganin lain mukaan tämä on yhdenpitävä lausekkeen $\neg p \wedge \neg q$ kanssa. Koska kuitenkin $\neg p = q$, tämä tarkoittaa $q \wedge \neg q$, mikä on ristiriita. Vastaoletus on siis hylättävä, ja $p \vee \neg p$ on tosi.

[9] Luvun 1.1 esimerkin mukaisesti koira voi haukkua, oli pihalla murtovaras tai ei.

[10] Luvun 1.1 esimerkin mukaisesti jos pihalla ei ole murtovarasta, koira voi yhtä hyvin haukkua tai olla haukkumatta.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg(p \vee \neg p)\\ \cdots\\ \textit{De Morgan}\\ \cdots\\ \neg p \wedge \neg\neg p\end{array}}{\neg\neg p}\,\neg\mathrm{I}}{p}\,\neg\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\neg(p \vee \neg p)\\ \cdots\\ \textit{De Morgan}\\ \cdots\\ \neg p \wedge \neg\neg p\end{array}}{\neg p}\,\neg\mathrm{I}}{\neg\neg(p \vee \neg p)}\,\neg\mathrm{I}, 1}{p \vee \neg p}\,\neg\mathrm{E}$$

De Morgan ei kuitenkaan ole sallittu sääntö luonnollisessa päättelyssä. Sääntö olisi toki mahdollista kirjoittaa auki (luku 5) ja sijoittaa osaksi päättelyä, mutta samaan lopputulokseen päästään suoraviivaisemminkin.

Todistus. Myös tässä aloitetaan vastaoletuksella $\neg(p \vee \neg p)$. Jos ensin oletetaan, että p on tosi, tällöin saadaan disjunktion tuontisäännön nojalla $p \vee \neg p$, mikä on ristiriita vastaoletuksen kanssa. Hylätään siis oletus p. Jos sitävastoin p onkin epätosi, tällöinkin päädytään samaan ristiriitaan. Siksi vastaoletus on hylättävä, ja $p \vee \neg p$ on tosi. Tulos on sama, valitaanpa ensimmäiseksi muuttujan p oletukseksi tosi tai epätosi. Kun ensimmäiseksi oletukseksi valitaan tosi, todistuksesta tulee yhden rivin lyhyempi:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_2}{p \vee \neg p}\,\vee\mathrm{I} \qquad [\neg(p \vee \neg p)]_1}{(p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p)}\,\wedge\mathrm{I}}{\neg p}\,\neg\mathrm{I}, 2}{p \vee \neg p}\,\vee\mathrm{I} \qquad [\neg(p \vee \neg p)]_1}{(p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p)}\,\wedge\mathrm{I}}{\neg\neg(p \vee \neg p)}\,\neg\mathrm{I}, 1}{p \vee \neg p}\,\neg\mathrm{E}\ .$$

□

Tällainen todistus tarkemmin ajateltuna herättää tietenkin kysymyksen: Kun todistuksessa hyödynnetään periaatetta, että mikäli jokin oletus hylätään ristiriitaisena, sen vastakohdan on pakko olla totta, onko lause $p \vee \neg p$ silloin tullut todistettua itsellään? Minkä tahansa väitteen hylkääminen ristiriitaisena lähtökohtaisesti olettaa, että jokin propositio voi olla vain joko totta tai epätotta, mutta ei jotain siltä väliltä.

Todistettava lause onkin tässä oikeastaan logiikan aksiooma, jonka pohjalle luonnollisen päättelyn säännöt on rakennettu. Onkin nurinkurista, ettei tämä aksiooma itse esiinny luonnollisessa päättelyssä, vaan se pitää johtaa.

10.4. Kielletyn ristiriidan laki

Lause 10.7.

$$\vdash \neg(p \land \neg p)$$

Kielletyn ristiriidan laki, *principium exclusi contradictionis*, tarkoittaa, ettei väite voi olla samanaikaisesti tosi ja epätosi.

Todistus. Todistus aloitetaan vastaoletuksesta $p \land \neg p$, eli p voi olla samanaikaisesti tosi ja epätosi. Tämä on välittömästi ja ilmeisesti ristiriita, minkä takia vastaoletus hylätään. Käänteinen on siis tosi, $\neg(p \land \neg p)$:

$$\frac{[p \land \neg p]_1}{\neg(p \land \neg p)} \neg\mathrm{I}, 1 \ .$$

□

Myös tässä todistuksessa on todistettava väittämä jo kätketty olettamukseksi todistusmenetelmän sääntöihin. Siksi nämä kaksi todistusta olivatkin nyt ehkä lähinnä muodollisia rituaaleja.

I. Liite: Erilaiset merkintätavat

Eri materiaaleissa näkee erilaisia merkintätapoja samoille asioille. Tähän taulukkoon on koottu muutamia kirjallisuudessa sekä eri aloilla esiintyviä vaihtoehtoja tässä tutkielmassa käytetyille esitysmuodoille. Jos numeroidun sarakkeen sisältö on tyhjä, tällöin konnektiivi muodostetaan johtamalla muista konnektiiveista, esim. digitaalielektroniikassa implikaatio olisi $\overline{a} + b$.

Nimi	[11]	[12]	[13]						[14]	[15]
konjunktio, ”ja”	$a \wedge b$	$a \,\&\, b$	ab		$a \cdot b$				a AND b	Kab
disjunktio, ”tai”	$a \vee b$	$a \mid b$	$a + b$						a OR b	Aab
negaatio, ”ei”	$\neg a$	$!a$	$\overline{a}$	$-a$		$\sim a$			NOT a	Np
implikaatio, ”jos … niin”	$a \rightarrow b$			$a\text{–>}b$	$a \supset b$	$a \rightarrowtail b$			a IMP b	Cab
ekvivalenssi, poissulkeva konjunktio, ”jos ja vain jos … niin”	$a \leftrightarrow b$	$a = b$	$a \otimes b$	$a \equiv b$		$a \Leftarrow\!\!\!\Rightarrow b$			a EQV b	Eab
poissulkeva disjunktio, ”joko … tai”	$a \not\leftrightarrow b$	$a \,\hat{}\, b$	$a \oplus b$	$a \not\equiv b$	$a \neq b$	$a <> b$	$a \veebar b$	$a \dot{\vee} b$	a XOR b	Jab
Shefferin viiva, ”eivät molemmat”	$a \uparrow b$		$\overline{ab}$	$a \mid b$	$\overline{a \cdot b}$	$a \,/\, b$			a NAND b	Dab
Peircen nuoli, ”ei kumpikaan”	$a \downarrow b$		$\overline{a + b}$			$a \dagger b$			a NOR b	Xab
konverssi implikaatio	$a \leftarrow b$				$a \subset b$				b IMP a	Bab
konverssi epäimplikaatio	$a \nleftarrow b$				$a \not\subset b$	$a \tilde{\leftarrow} b$				Mab
abjunktio, materiaalinen epäimplikaatio	$a \nrightarrow b$				$a \not\supset b$	$a \tilde{\rightarrow} b$				Lab
tosi, tautologia		`true`	1	$\top$	T	**T**				Vab
epätosi, ristiriita		`false`	0	$\bot$	F	**F**				Oab
yksisuuntainen päättely, looginen seuraus				$\Rightarrow$		$\vdash$				
kaksisuuntainen päättely, loogisesti ekvalentit				$\Leftrightarrow$		$\dashv\vdash$				

[11] propositiologiikassa vakiintunein muoto

[12] monissa ohjelmointikielissä, esim. C; joskus merkki on käyttötarkoituksesta riippuen kahdennettu, esim. &&

[13] digitaalielektroniikassa käytetty aritmeettinen ilmaisumuoto. Negaatiota ilmaistaan yläviivalla, jotka pinoutuvat tarvittaessa päällekkäin.

[14] niinikään ohjelmointikielissä, mutta monissa muissakin yhteyksissä

[15] Bocheńskin notaatio

II. Liite: Konnektiivien ominaisuudet

Yksipaikkainen konnektiivi $\star$ on idempotentti, jos $\star p_0 \Leftrightarrow p_0$, ja refleksiivinen, jos $\star p_0$ on aina tosi. Kaksipaikkainen konnektiivi $\star$ on...

- idempotentti, jos $p_0 \star p_0 \Leftrightarrow p_0$
- vaihdannainen[16], jos $p_0 \star p_1 \Leftrightarrow p_1 \star p_0$
- liitännäinen, jos $p_0 \star (p_1 \star p_2) \Leftrightarrow (p_0 \star p_1) \star p_2$
- refleksiivinen, jos $p_0 \star p_0$ on aina tosi
- transitiivinen, jos $(p_0 \star p_1) \wedge (p_1 \star p_2) \Rightarrow p_0 \star p_2$
- yhtenäinen, jos $(p_0 \star p_1) \vee (p_1 \star p_0)$ on aina tosi, kun $p_0 \not\equiv p_1$
- vahvasti yhtenäinen, jos $(p_0 \star p_1) \vee (p_1 \star p_0)$ on aina tosi

...kaikilla totuusjakaumilla $v(p_0), v(p_1), v(p_2)$. Taulukossa 1 on koottu näiden relaatioiden paikkaansapitävyys kullekin konnektiiville.

Konnektiivi	idempot.	vaihdann.	liit.	refl.	trans.	yht.	vahvasti yht.
negaatio	-			-			
konjunktio	✓	✓	✓	-	✓	-	-
disjunktio	✓	✓	✓	-	-	✓	-
implikaatio	-	-[17]	-	✓	✓	✓	✓
konv. implikaatio	-	-	-	✓	✓	✓	✓
ekvivalenssi	-	✓	✓	✓	✓	-	-
poissulkeva disjunktio	-	✓	✓	-	-	✓	-
Shefferin viiva	-	✓	-	-	-	✓	-
Peircen nuoli	-	✓	-	-	✓	-	-
abjunktio / epäimpl.	-	-	-	-	✓	✓	-
konv. epäimplikaatio	-	-	-	-	✓	✓	-

Taulukko 1: Konnektiiveja koskevat relaatio-ominaisuudet.

Taulukossa 2 on koottu kaksipaikkaisten konnektiivien osittelulait. Osittelut luetaan rivi sarakkeen suhteen, esimerkiksi jos rivillä on $\rightarrow$ ja sarakkeessa $\vee$, solu tarkoittaa implikaation osittelua disjunktion suhteen.

[16] samalla myös symmetrinen

[17] kts. kuitenkin permutaatiolaki, s. 21

osittelu	$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\leftarrow$	$\leftrightarrow$	$\nleftrightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\nrightarrow$	$\nleftarrow$
$\wedge$	●	●	-	-	-	●	-	-	●	●
$\vee$	●	●	●	●	●	-	-	-	-	-
$\to$	◖	◖	◖	◖	◖	-	-	-	-	-
$\leftarrow$	◗	◗	◗	◗	◗	-	-	-	-	-
$\leftrightarrow$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\nleftrightarrow$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\uparrow$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\downarrow$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\nrightarrow$	◗	◗	-	-	-	◗	-	-	◗	◗
$\nleftarrow$	◖	◖	-	-	-	◖	-	-	◖	◖

Taulukko 2: Konnektiiveille pätevät osittelulait.
◖ tarkoittaa että osittelu pätee vain vasemmalta.
◗ tarkoittaa että osittelu pätee vain oikealta.
● tarkoittaa, että osittelu pätee kumpaankin suuntaan.
Konnektiivisymbolien merkitykset on listattu liitteessä I.

Hakemisto

Viitteet

[Lem92] Edward J. Lemmon. *Beginning logic.* Chapman & Hall, 1992.

[SV92] Hannele Salminen ja Jouko Väänänen. *Johdatus Logiikkaan.* Gaudeamus, 1992.

[RK13] Kenneth H. Rosen ja Kamala Krithivasan. *Discrete mathematics and its applications.* McGraw-Hill, 2013.